

Exercice 01 Principale 2020 7 points

I – Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{-e^{2x}}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}}$.

2) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $0 < f(x) < 1$.

3) a) Dresser le tableau de variation de la f .

b) Montrer que f réalise une bijection f^{-1} de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

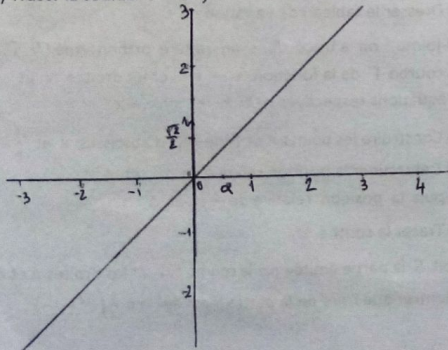
c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α telle que $0.5 < \alpha < 0.6$.

d) Déterminer le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.
Interpréter graphiquement le résultat.

4) Dans la figure ci-après, on a construit la droite $y = x$ et on a placé le réel α sur l'axe des abscisses et le réel $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur l'axe des ordonnées.

a) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ de f^{-1} .



5) a) Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x - \ln(1 + \sqrt{1 + e^{2x}})$$

est une primitive de f .

b) On désigne par A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

$$\text{Montrer que } A = \alpha + \ln\left(\frac{\alpha(1+\sqrt{2})}{\alpha+1}\right)$$

II – $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction F_k définie sur $[0, +\infty[$

$$\text{par } F_k(x) = \int_0^x (f(t))^k dt$$

1) a) Montrer que la fonction F_k est croissante sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que $\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq (f(t))^k \leq e^{-kt}$.

c) En déduire que $\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq F_k(x) \leq \frac{1}{k}$.

d) Montrer alors que la fonction F_k possède une limite l_k lorsque x tend vers $+\infty$.

e) Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} l_k = 0$.

2) a) En utilisant la question I-5)a), montrer que $l_1 = -h(0)$.

b) Montrer que $\forall t \in [0, +\infty[, (f(t))^3 - f(t) = f'(t)$.

c) En déduire que $\forall x \geq 0, F_3(x) = F_1(x) + f(x) - f(0)$.

d) Montrer que $l_3 = \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) a) Montrer que $\forall x \geq 0$ et $\forall k \geq 2$,

$$F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x) = \frac{1}{2k-1} ((f(x))^{2k-1} - (f(0))^{2k-1})$$

b) En déduire que $l_{2k+1} - l_{2k-1} = \frac{-1}{(2k-1)(\sqrt{2})^{2k-1}}, k \geq 2$.

c) Montrer que $l_{2k+1} = l_3 - \sum_{m=2}^k \frac{1}{(2m-1)(\sqrt{2})^{2m-1}}, k \geq 2$.

d) En déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{m=2}^k \frac{1}{(2m-1)(\sqrt{2})^{2m-1}}$.

Exercice 02 Contrôle 2020 6 points

Soit la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x \ln(1+x)}{1+x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A)

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$. Interpréter le résultat.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $] -1, +\infty[$.

$$\text{b) Montrer que } f'(x) = \frac{x + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

c) Montrer que : $x + \ln(1+x) > 0 \iff x > 0$.

d) En déduire le tableau de variation de la fonction f .

e) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

B) Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_n = \int_1^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt$ et on considère F_n la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F_n(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} \sqrt[n]{t} dt$.

1) Montrer que $G(x) = \frac{1}{2} \ln^2(1+x) - \frac{1}{2} \ln^2(2)$, pour $x \geq 1$.

2) Montrer que $\forall x \geq 1, G(x^n) \leq F_n(x) \leq x G(x^n)$.

3) Montrer que F_n est dérivable sur $[1, +\infty[$ et montrer que $\forall x \geq 1, F'_n(x) = n f(x^n)$.

4) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n V_n = F_n\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

5) a) Montrer que $G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) \leq n V_n \leq \left(\frac{n+1}{n}\right) G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$.

b) Vérifier que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}$.

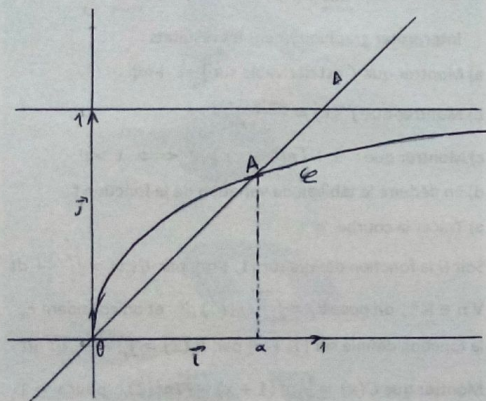
En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$.

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n V_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

Exercice 03 Principale 2019 6 points

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}$

- 1) a) Montrer que f possède une fonction réciproque g définie sur $[0, 1[$
- b) Montrer que $\forall x \in [0, 1[$ on a $g(x) = -\ln(1 - x^2)$
- c) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α sur $[0.7, 0.8]$
- d) On donne en annexe la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. la première bissectrice Δ et le point $A(\alpha, \alpha)$



On désigne par $\mathcal{C}'$ courbe de g . Tracer $\mathcal{C}'$ dans le même repère

- 2) Soit φ la fonction définie sur $[0, 1[$ par $\varphi(x) = \int_0^{g(x)} f(t) dt$
 - a) Montrer que φ est dérivable sur $[0, 1[$ et que $\varphi'(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}$
 - b) Déterminer a, b et c pour que $\forall x \in [0, 1[$ on a $\frac{2x^2}{1-x^2} = a + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{1-x}$
 - c) En déduire que $\varphi(x) = -2x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ avec $x \in [0, 1[$
 - d) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la région du plan située entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.
Montrer que $\mathcal{A} = 2\left(\varphi(\alpha) - \frac{\alpha^2}{2}\right)$

- 3) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 3^k}$

Soit $n \geq 1$. On pose $\forall t \in [0, 1[$, $S_n(t) = 2 \sum_{k=1}^n t^{2k-1}$

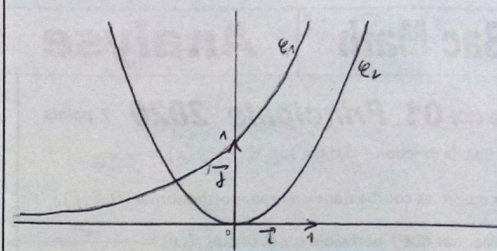
- a) Montrer que $\int_0^{\sqrt{3}/3} S_n(t) dt = U_n$
- b) Montrer que $\forall t \in [0, 1[$, $S_n(t) = (1 - t^{2n})g'(t)$
- c) Montrer que pour tout $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ on a :
$$\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)g'(t) \leq S_n(t) \leq g'(t)$$
- d) En déduire que $\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \leq U_n \leq g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- 4) Montrer alors que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 04 Contrôle 2019 5.5 points

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} g(x) = e^{\frac{-1}{2x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
- b) Etudier la parité de g . Interpréter le résultat
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x}$ et en déduire que g est dérivable en 0
- b) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $g'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$
- c) Dresser le tableau de variation de g
- d) Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$
- e) On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g .
Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$
- 3) a) Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion A et B que l'on déterminera (A le point d'inflexion d'abscisse positive)
- b) En annexe, on a représenté dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations : $y = e^x$ et $y = x^2$.
Construire dans le même repère les points A et B et tracer la courbe $\mathcal{C}$
- 4) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = g^2(x)$.
Justifier que f est croissante sur $[0, +\infty[$



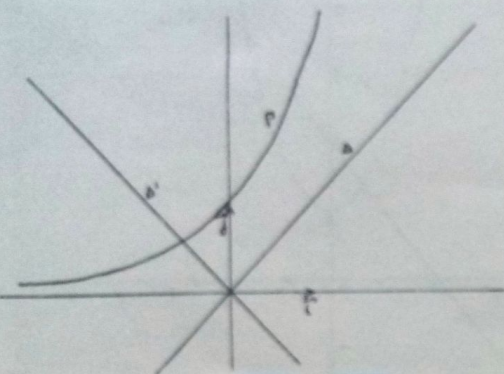
- 5) Soit un entier $n \geq 2$; On pose $V(n) = \pi \int_0^n f(t) dt$
 - a) Interpréter graphiquement $V(n)$
 - b) Montrer que $V(n) \geq \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(t) dt$
 - c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(n) = +\infty$
 - d) Montrer que $V(n) \leq n\pi$
 - e) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V(n)}{n}$

Exercice 05 Principale 2018 7 points

A) f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\begin{cases} f(x) = x \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Vérifier que f est continue à droite en 0
- b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter
- c) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Ci-jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe Γ de la fonction $x \rightarrow e^x$ et les droites Δ et Δ' d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$
 - a) Construire les points A et B de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses e et $\frac{1}{e}$
 - b) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ puis la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ'
 - c) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$
- 3) Soit S la partie limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites Δ et Δ' .
Montrer que l'aire de la partie S est égale à $\frac{1}{4}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$



B) Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \int_0^1 t^n e^t dt$ et $V_n = \int_1^2 t^n e^t f(t) dt$

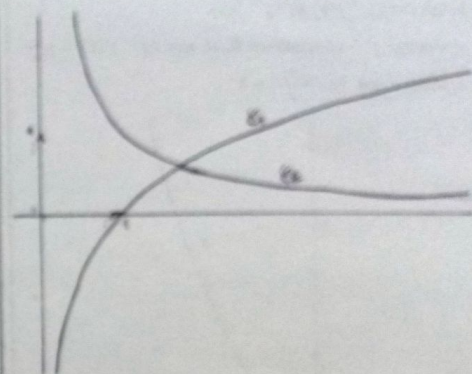
- 1) a) Montrer que $U_n > 0$
 b) Montrer que $0 < U_n \leq \frac{e}{n+1}$. En déduire la limite de U_n
 c) Montrer que $U_{n+1} = e - \frac{e^2}{e^{n+1}} - (n+1)U_n$
 d) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)U_n = e$
- 2) a) Montrer que $-\frac{U_n}{e} \leq V_n \leq 0$. Déduire la limite de V_n
 b) Vérifier que pour tout $t \in]0, +\infty[$, $f(t) = t f'(t) - t$
 Montrer alors que $V_n = \int_1^2 t^{n+1} e^t f'(t) dt - U_{n+1}$
 c) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que :

$$(n+2)V_n = \frac{e^2}{e^{n+2}} - V_{n+1} - U_{n+1}$$

 d) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+2)V_n = 0$
- 3) a) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha_n \in [\frac{1}{e}, 1]$ tel que $f(\alpha_n) = \frac{V_n}{U_n}$
 b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{U_n} = 0$
 c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$

Exercice 06 Contrôle 2018 7 points

- 1) Soit g fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - x + x \ln x$
 a) Etudier les variations de g
 b) En déduire que $\forall x > 0 ; 1 + \ln x \geq x$
- 2) Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1+x \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$
 On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 a) Montrer que f est continue à droite en 0
 b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = +\infty$. Interpréter
 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement
- 3) a) Montrer que $\forall x > 0, f'(x) = -\frac{1 + \ln x}{(1 + x \ln x)^2}$
 b) Dresser le tableau de variation de f
- 4) Dans la figure ci-après, on a tracé dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes C_1 et C_2 des fonctions définies sur $]0, +\infty[$ respectivement par : $x \rightarrow \ln x$ et $x \rightarrow \frac{1}{x}$
 a) Construire le point A de C_1 d'abscisse $(\frac{1}{e})$ et le point B de C_2 d'abscisse $(1 - \frac{1}{e})$
 Déduire une construction du point C de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $(\frac{1}{e})$
 b) Déduire de la question 1)b) que pour tout $x > 0$, $f(x) \leq \frac{1}{x}$
 Déterminer alors la position relative de $\mathcal{C}_f$ et C_2 . Tracer $\mathcal{C}_f$
- 5) Soit la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t) dt$
 a) Montrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\frac{1}{1+t \ln t} \leq f(t)$
 b) Montrer alors que $\forall x \geq 1$, $\ln(1 + \ln x) \leq F(x) \leq \ln x$
 c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$
- 6) a) Montrer que la fonction $h : x \rightarrow x - F(x)$ est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$
 b) En déduire que l'équation $h(x) = n$ admet dans $[1, +\infty[$ une solution unique α_n
 c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$
 d) Vérifier que $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{1 - F(\alpha_n)}$. Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$



Exercice 07 Principale 2017 7,5 points

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$

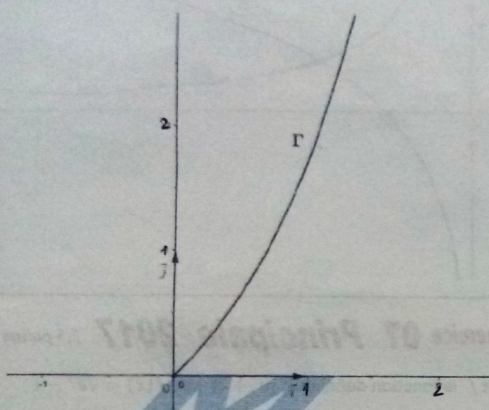
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter les résultats
- 2) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement
 b) Montrer que $\forall x > 0, f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$
 c) Dresser le tableau de variation de f
 d) En déduire que $e^x - 1 \leq \sqrt{e^x - 1} \iff x \leq \ln 2$
- 3) Montrer que le point $B(\ln 2, 1)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$
- 4) Dans la figure ci-jointe, on a tracé dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe Γ de la fonction $x \rightarrow e^x - 1$
 a) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Γ
 b) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$
- 5) Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = \tan(x)$
 a) Montrer que g réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, +\infty[$
 On note g^{-1} sa fonction réciproque

b) Calculer $(g^{-1})(0)$ et $(g^{-1})(1)$

c) Montrer g^{-1} dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

d) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{-1}(x)}{x} = 1$



6) On pose $\forall x \in [0, +\infty[$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

et $G(x) = 2(f(x) - (g^{-1} \circ f)(x))$

a) Montrer que $\forall x > 0$, $F'(x) = G'(x)$

b) En déduire que $\forall x \in [0, +\infty[$, $F(x) = G(x)$

c) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, la courbe Γ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.

Montrer que $A = 1 + \ln 2 - \frac{\pi}{2}$

7) Soit n en entier naturel tel que $n \geq 2$.

On désigne par f_n la fonction définie sur $[\ln(n), +\infty[$ par $f_n(x) = \sqrt{e^x - n}$. On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Soit G_n la fonction définie sur $[\ln(n), +\infty[$ par

$$G_n(x) = 2 \left(f_n(x) - \sqrt{n} g^{-1} \left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}} \right) \right)$$

Montrer que $\forall x \in [\ln(n), +\infty[$, $G_n(x) = \int_{\ln(n)}^x f_n(t) dt$

b) Vérifier que $\forall x \geq \ln(n)$, $\sqrt{e^x - n} < \sqrt{e^x - 1}$

En déduire que $x \geq \ln(n)$, $f_n(x) \leq e^x - 1$

c) Soit A_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_n$, la courbe Γ et les droites $x = \ln(n)$ et $x = \ln(n+1)$.

Montrer que $A_n = 2\sqrt{n} g^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) - 1$

d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$

Exercice 08 Contrôle 2017 7 points

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln \left(\frac{x^2}{x+1} \right)$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A)

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Interpréter graphiquement

2) a) Montrer que $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{x+2}{x(x+1)}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = x + 1$

b) On note α la solution positive.

Vérifier que la deuxième solution est égale à $-\frac{1}{\alpha}$

c) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse α

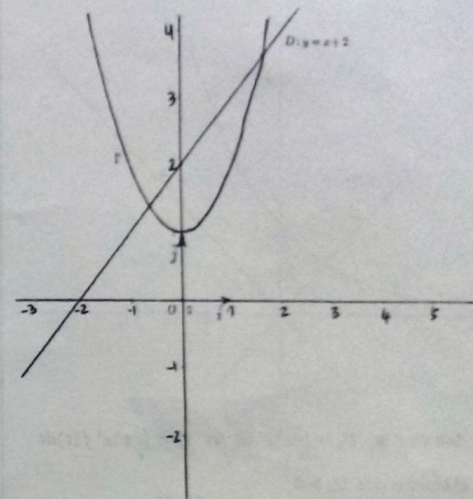
d) Montrer que l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A est : $y = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) (x - \alpha)$

e) Vérifier que la tangente T passe par le point $B \left(0, -1 - \frac{1}{\alpha^2} \right)$

4) Dans la figure ci-contre, on a tracé dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite $D: y = x + 2$ et la courbe Γ de la fonction $x \rightarrow x^2 + 1$

a) Construire les points A et B

b) Construire la tangente T et tracer la courbe $\mathcal{C}_f$



B) Soit n un entier naturel non nul

On pose pour tout $x \geq 1$, $G_n(x) = \int_1^x f(t^n) dt$

1) a) Montrer que $\forall x \geq 1$, $\ln \left(\frac{1}{x} \right) (x-1) \leq G_n(x) \leq f(x^n)(x-1)$

b) Montrer que $\forall x \geq 1$,

$$G_n(x) = x f(x^n) - \ln \left(\frac{1}{x} \right) - n(x-1) - \int_1^x \frac{n}{1+t^n} dt$$

2) On pose $J_n = n \int_1^{\sqrt[n]{\alpha}} \frac{1}{1+t^n} dt$

a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$

b) En utilisant B)1)a), montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\sqrt[n]{\alpha}) = 0$

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln(\alpha)$

d) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$

Exercice 09 Principal 2016 8 points

4) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.
On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter les résultats.

- 2) a) Montrer que $\forall x > 0, f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}$.
b) Dresser le tableau de variation de f .
c) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

3) Soit $\lambda \in]0, 1[$. On désigne par S_λ l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

Calculer S_λ en fonction de λ et déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} S_\lambda$.

B)

- 1) Soit g_1 et g_2 les restrictions de f respectivement à chacun des intervalles $]0, 1[$ et $[1, +\infty[$.

Montrer que g_1 réalise une bijection de $]0, 1[$ sur un intervalle I que l'on précisera et que g_2 réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur I .

- 2) Soit n un entier naturel non nul

a) Montrer que l'équation $f(x) = e + \frac{1}{n}$ admet dans $]0, +\infty[$ exactement 2 solutions α_n et β_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.
On définit ainsi, pour tout entier naturel non nul n , deux suites réelles (α_n) et (β_n) .

b) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

- 3) Soit h définie par $\begin{cases} h(x) = \sqrt{x} \left(f(x) - \left(e + \frac{1}{n} \right) \right) & \text{si } x > 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$

On note $\mathcal{C}_h$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que h est continue à droite en 0.

b) Déterminer le signe de $h(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

- 4) Soit H la primitive de h sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en 0.

a) Justifier que les fonctions u et v définies par :

$u \mapsto \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt$ et $v \mapsto 2 + 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et dérivables sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que $\forall x \geq 0, u(x) = v(x)$.

c) Donner l'expression de $H(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

- 5) Soit A_n l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_h$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \beta_n$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 2 - \frac{2}{3}e$.

Exercice 10 Contrôle 2016 7 points

Soit f la fonction définie sur $[e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}]$ par $f(x) = \frac{\sqrt{2-\ln^2 x}}{x}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow e^{-\sqrt{2}}} \left(\frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = e^{-\sqrt{2}}$.

b) En écrivant $\frac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}} = \frac{-(\ln x + \sqrt{2})}{x \sqrt{2 - \ln^2 x}} \cdot \frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}}$, montrer que

$$\lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} \left(\frac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = -\infty. \text{ Interpréter le résultat}$$

c) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en $e^{-\sqrt{2}}$.

- 2) On donne ci-dessous, le tableau donnant le signe de $f''(x)$, le signe de $f'(x)$ et les variations de la fonction f .

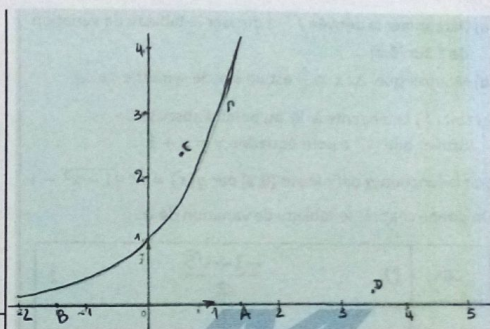
x	$e^{-\sqrt{2}}$	e^{-1}	α	β	$e^{\sqrt{2}}$
$f''(x)$	-	-	0	+	0
$f'(x)$	+	0	-	-	-
f					

Justifier que les points C et D , de coordonnées $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$ sont deux points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

- 3) Dans la figure ci-après, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormé direct

$A(\sqrt{2}, 0)$, $B(-\sqrt{2}, 0)$, $C(\alpha, f(\alpha))$ et $D(\beta, f(\beta))$

Γ est la courbe représentative de la fonction exponentielle.



- a) Construire les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses $e^{-\sqrt{2}}$, e^{-1} et $e^{\sqrt{2}}$.
b) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 4) Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = \sin x$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. On notera h sa fonction réciproque.

b) Montrer que h dérivable sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) Soit u la fonction définie sur $[e^{-1}, e]$ par $u(x) = h\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)$.

Montrer que $\forall x \in [e^{-1}, e], u'(x) = \frac{1}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$.

d) En déduire que $\int_{e^{-1}}^e \frac{dx}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{\pi}{2}$.

- 5) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e^{-1}$ et $x = e$.

a) Montrer que $A = 2 + \int_{e^{-1}}^e \left(\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} \right) dx$.

b) Vérifier que $\forall x \in [e^{-1}, e], \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} - f(x)$.

c) En déduire la valeur de A .

Exercice 11 Principal 2015 7 points

- I) Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = e^{\sin x}$.

On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Déterminer la dérivée f' et dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$
b) Montrer que $\Delta: x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$
c) Soit (T) la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0
Justifier que (T) a pour équation $y = x + 1$
- 2) Soit la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = e^x \sqrt{1-x^2} - 1$
On donne ci-après le tableau de variation de g

x	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	1
$g'(x)$	+	0	-
g	0	$g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$	-1

a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0, 1[$ une solution unique α .

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0, 1]$

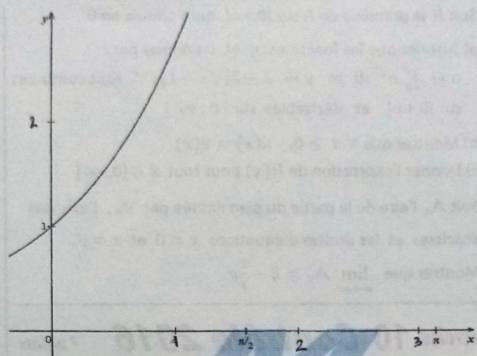
- 3) On se propose de déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de sa tangente (T) au point d'abscisse 0 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Soit h définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x) = e^{\sin x} - (x+1)$

- a) Vérifier que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $h'(x) = g(\sin x)$.
- b) Montrer qu'il existe un unique $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin \beta = \alpha$
- c) Déterminer alors l'image par la fonction sinus de chacun des intervalles $[0, \beta]$ et $\left[\beta, \frac{\pi}{2}\right]$
- d) Dresser le tableau de variation de h
- e) En déduire que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \geq x + 1$. Conclure

II)

- 1) a) Montrer que $\forall x \geq 0$, $\sin x \leq x$
b) Déduire alors que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \leq e^x$
c) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe de fonction $x \rightarrow e^x$. Tracer la droite (T) et la courbe $\mathcal{C}_f$



- 2) a) Montrer que $\int_0^1 f(x) dx \leq e-1$ et $\int_1^{\pi/2} f(x) dx \leq e\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\pi$.
Montrer que $\frac{\pi^2}{4} + \pi \leq A \leq e\pi - 2$

Exercice 12 Contrôle 2015 7 points

I) Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(t) = 3\ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$

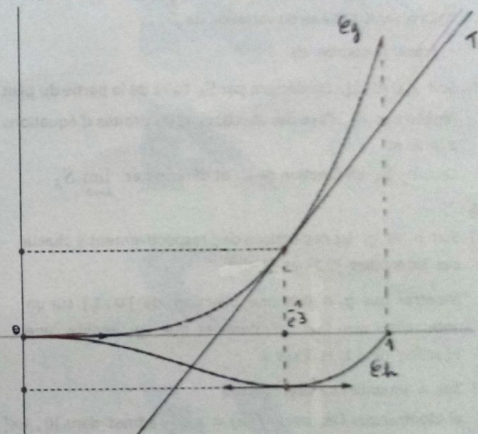
- 1) a) Dresser le tableau de variation de la fonction u
b) En déduire le signe de u
- 2) Soit la fonction $f(x) = x^3[\ln(1+x) - \ln x]$ si $x \in]0, 1]$
 $f(0) = 0$
a) Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0 et calculer $f'_d(0)$
b) Vérifier que $\forall x \in]0, 1]$, $f'(x) = x^2 u\left(\frac{1}{x}\right)$
c) Dresser le tableau de variation de la fonction f

II) On considère les fonctions g et h définies sur $[0, 1]$ par :

$$g(x) = x^3 \ln(x+1) \quad \text{et} \quad \begin{cases} h(x) = x^3 \ln x & \text{si } x \in]0, 1] \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne respectivement par C_f , C_g , et C_h , les courbes des fonctions f , g et h dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Montrer que la courbe C_h admet une tangente horizontale au point d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$
- 2) a) Vérifier que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = g(x) - h(x)$
b) Donner la position relative des courbes C_f et C_g
c) Soit T et T' les tangentes respectives à C_f et C_g aux points d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$. Montrer que T et T' sont parallèles
- 3) Ci-joint, on a tracé dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes C_g et C_h , et leurs tangentes aux points d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.



- a) Construire le point de C_f d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$ et la tangente T
- b) Tracer la courbe C_f
- 4) a) Justifier que h admet une unique primitive H sur $[0, 1]$ qui s'annule en 1
b) Soit $\alpha \in]0, 1]$ et $A_\alpha = \int_\alpha^1 x^3 \ln x dx$.
Exprimer A_α en fonction de H
c) Calculer A_α à l'aide d'une intégration par parties
d) En déduire $H(0)$
e) Déterminer alors l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes C_f et C_g et les droites $x=0$ et $x=1$.

Exercice 13 Principal 2014 7 points

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \ln(1 + \tan x)$ et soit (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4})^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$
 b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$
 c) Dresser le tableau de variation de la fonction f
- 2) a) Vérifier que les points $O, A(\frac{\pi}{4}; \ln 2)$ et $I(\frac{\pi}{8}; \frac{\ln 2}{2})$ sont des points de la courbe (C). (On donne $\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$)
 b) Montrer que $\forall x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, $f(\frac{\pi}{4} - x) = \ln 2 - f(x)$
 (on rappelle que : $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$)
 c) Justifier alors que le point I est un centre de symétrie pour la courbe (C)

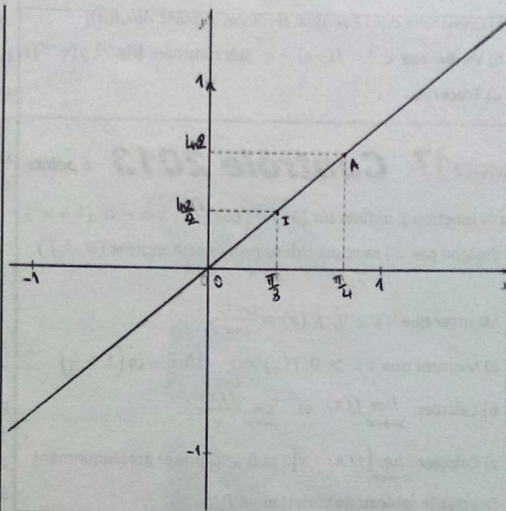
- 3) Dans l'annexe ci-jointe, on a placé les points I et A dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 Tracer la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en précisant sa tangente au point O .

- 4) On désigne par S_1 la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OA) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{8}$ et on désigne par S_2 la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OA) et les droites $x = \frac{\pi}{8}$ et $x = \frac{\pi}{4}$.

- a) Justifier que les surfaces S_1 et S_2 ont la même aire
- b) Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$
- 5) a) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

- On note f^{-1} la réciproque de f .
- b) Justifier que la fonction f^{-1} est dérivable sur J et donner une expression de $(f^{-1})'(x)$ pour $x \in J$.

- c) Donner la valeur de $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1 + (e^x - 1)^2} dx$



Exercice 14 Contrôle 2014 6 points

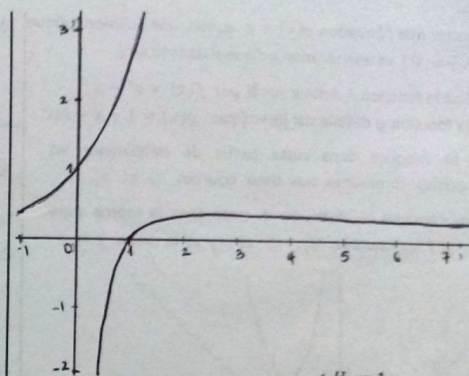
- 1) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
 Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

- 2) Soit g fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\begin{cases} g(x) = e^{f(x)} & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

- a) Montrer que g est continue à droite en 0
- b) Montrer que g est dérivable à droite en 0
- c) Dresser le tableau de variation de g .

- 3) Dans l'annexe ci-jointe, on a représenté dans repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe de la fonction f et la courbe de la fonction e^x .

- a) Construire le point A de coordonnées $(e, g(e))$
- b) Déterminer et tracer la tangente à la courbe C_g en 1.
- c) Tracer la courbe C_g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$



- 4) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par
$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_n = g(n) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

 a) Donner la limite de (U_n)
 b) Déterminer l'entier naturel n pour lequel $\sqrt[n]{n}$ est maximal.

Exercice 15 Principal 2013 1.5 points

Q.C.M. Répondre par "Vrai" ou "Faux" en justifiant la réponse :

- 2) Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{1+t^2} dt$.
 (A₃) : " F est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ "
 (A₄) : " $\forall x \in D_{df}$ on a $F'(x) = \frac{x}{1+(\ln x)^2}$ "

Exercice 16 Principal 2013 6 points

I — Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ et soit $\mathcal{C}_\varphi$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

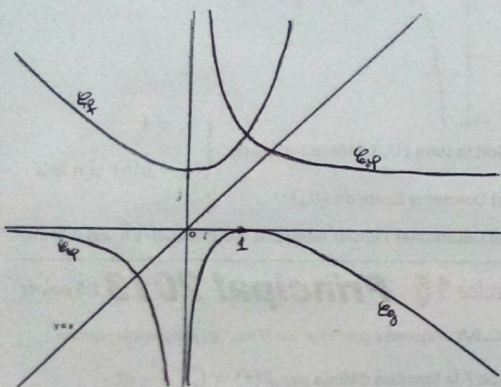
- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.
 Interpréter graphiquement les résultats trouvés.
 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x)$.
 Interpréter graphiquement les résultats trouvés.
 c) Montrer que φ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

- 2) Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in]-\infty, 0[$ et une solution unique β dans $]0, +\infty[$.

II – Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$ et la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x + \ln x$

On se propose dans cette partie de déterminer les tangentes communes aux deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et la droite $y = x$



- 1) Soit a un réel et b un réel strictement positif

On désigne par Δ_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et par D_b la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse b .

- a) Donner une équation de Δ_a et une équation de D_b
b) Montrer que : $(\Delta_a \text{ et } D_b \text{ sont parallèles}) \iff (b = e^{-a})$

Dans la suite on suppose que Δ_a et D_b sont parallèles et $b = e^{-a}$

- 2) a) M. que : $(\Delta_a \text{ et } D_b \text{ confondues}) \iff (a \neq 0 \text{ et } a = \frac{e^a}{e^a - 1})$
b) En déduire que Δ_a est tangente aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectivement aux points $A(\alpha, f(\alpha))$ et $B(e^{-\alpha}, g(e^{-\alpha}))$ (α étant la valeur définie dans la question 1 - 2))
c) Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent une deuxième tangente commune que l'on précisera.

- 3) a) Construire dans l'annexe ci-jointe, le point $A(\alpha, f(\alpha))$
b) Vérifier que $e^{-\alpha} = f(-\alpha) - \alpha$ puis construire $B(e^{-\alpha}, g(e^{-\alpha}))$
c) Tracer Δ_a .

Exercice 17 Contrôle 2013 6 points

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I –

- 1) Montrer que $\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$
2) a) Montrer que $\forall x > 0, f(x) = x - 2\ln x - \ln(1 + \frac{1}{x^2})$
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter graphiquement
3) Dresser le tableau de variation de f
4) a) Donner une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathcal{C}_f$ en 0
b) Donner la position relative de la droite Δ à la courbe $\mathcal{C}_f$
c) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ et la courbe $\mathcal{C}_f$

II – Soit G la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $G(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$

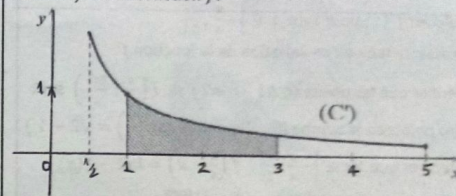
- 1) a) Montrer que G est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et déterminer sa fonction dérivée $G'(x)$.
b) En déduire que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] ; G(x) = x$
c) Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$.
2) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite Δ et les droites $x=0$ et $x=1$
a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \ln 2 - 2 + 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

b) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Exercice 18 Principal 2012 3 points

Le plan muni d'un repère orthonormé. Soit f une fonction définie et dérivable sur $[\frac{1}{2}, 5]$ telle que (C) sa courbe représentative passe par les points $A(1,0)$ et $B(3,1)$.

Dans la figure ci-après, on a représenté la courbe (C') de la dérivée f' de la fonction f .



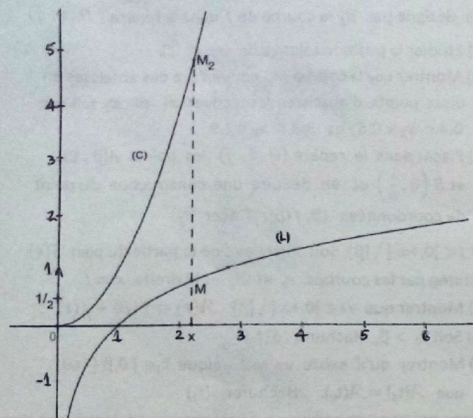
Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- 1) (C) admet une tangente de coefficient directeur -1
2) L'aire de la partie hachurée est égale à 1.
3) (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$
4) Pour tout a et b de $[1, 3]$, $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$

Exercice 19 Principal 2012 6 points

I – Soit la fonction f_2 définie sur $]0, +\infty[$ par : $f_2(x) = x^2 - \ln x$
On désigne par (Γ) sa courbe dans repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$ et interpréter le résultat
c) Dresser le tableau de variation de f_2
2) Dans l'annexe ci-jointe on a tracé, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (L) de la fonction $\ln$ et la courbe (C) d'équation $y = x^2$
a) Soit $x > 0$. On considère les points M et M_2 de même abscisse x et appartenant respectivement à (L) et (C) . Vérifier que $MM_2 = f_2(x)$
b) Construire alors dans l'annexe les points de la courbe (Γ) d'abscisses respectives $2, \frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de l'annexe.



II -

- 1) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

Soit la fonction f_k définie sur $]0, +\infty[$ par $f_k(x) = x^k - \ln x$

- a) Déterminer f'_k la fonction dérivée de f_k
b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $\frac{1+\ln k}{k}$
c) $\forall x > 0$, on considère les points $M_k(x, x^k)$ et $M(x, \ln x)$.

Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k

- 2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$.

- a) Vérifier que $\ln(u_k) = -\frac{\ln k}{k}$ et en déduire la limite de (u_k)
b) Soit $A(1,0)$ et A_k le point de coordonnées $(u_k, f_k(u_k))$
Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers $+\infty$.

Exercice 20 Contrôle 2012 5 points

- 1) Soit la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x \ln x$

- a) Etudier les variations de g
b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0, +\infty[$. Vérifier que $3,5 < x_0 < 3,6$

- 2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$
b) Dresser le tableau de variation de f .
c) Tracer la courbe (C) (on prendra $x_0 = 3,6$)

- 3) Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \int_1^n f(t) dt$

- a) Montrer que la suite (a_n) est croissante
b) Montrer que $\forall x \in]0, 1[, \ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \ln x$
c) En déduire que $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1+\ln n}{n}\right) \leq a_n \leq 1 - \frac{\ln n}{n}$
d) Montrer alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Exercice 21 Principal 2011 6 points

I - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$
et (I) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

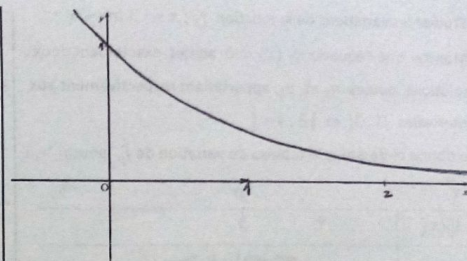
- 1) Déterminer une équation de la tangente à (I) en 0
2) a) Montrer que $\forall x \geq 0$ on a : $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.
b) En déduire que $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$

II - Soit f fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
et soit (C) sa courbe représentative dans repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$
b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0
c) Dresser le tableau de variation de f

- 2) a) Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$ un point d'inflexion de (C)
b) Donner une équation de la tangente T à (C) au point I
3) Dans la figure ci-après, on a représenté la courbe (I) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- a) Construire le point I . Construire la tangente T .
b) Tracer la courbe (C)



- 4) Soit A_k l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations $y = 1$, $x = k$ et $x = k+1$ où $k \in \mathbb{N}^*$

- a) En utilisant I - 2) b) montrer que :

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

- b) Calculer $\lim A_k$

- 5) Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n A_k$

- a) Interpréter graphiquement S_n
b) Montrer que $\ln(n+1) - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \leq S_n \leq \ln(n+1)$
c) En déduire que les limites à l'infini de S_n et $\frac{S_n}{\ln(n)}$

Exercice 22 Contrôle 2011 3 points

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dt$

Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse.

- 1) Pour tout $x > 0$, $f'(x) \geq 0$
2) Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 0$
3) $f(2) \leq \ln 2$.

Exercice 23 Contrôle 2011 6 points

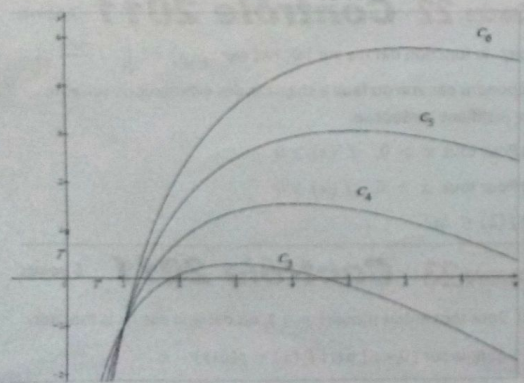
- A) Pour tout entier naturel $p \geq 3$, on désigne par f_p la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f_p(x) = p(\ln x) - x$.

On note (C_p) la courbe de f_p dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Etudier les variations de la fonction $f_3 : x \mapsto 3 \ln x - x$
- 2) Montrer que l'équation $f_3(x) = 0$ admet exactement deux solutions, notées u_3 et v_3 , appartenant respectivement aux intervalles $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$
- 3) On donne ci-dessous, le tableau de variation de f_p pour $p > 3$

x	0	p	$+\infty$
$f'_p(x)$		+	-
f_p	$-\infty$	$f_p(\ln p) - p$	$-\infty$

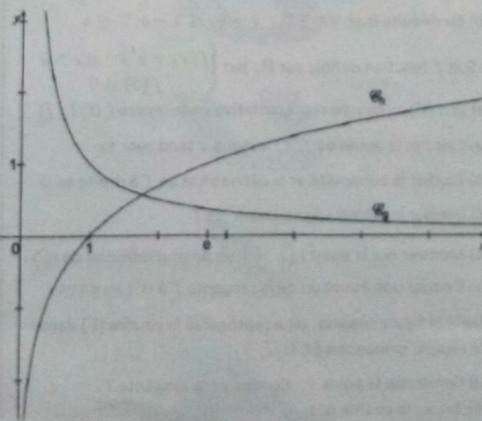
- a) Montrer que, $\forall p > 3$, il existe un unique réel $u_p \in]1, p[$ tel que $f_p(u_p) = 0$
 - b) Montrer que, $\forall p > 3$, il existe un unique réel $v_p > p$ tel que $f_p(v_p) = 0$
- B) Dans cette partie, on se propose d'étudier les deux suites (u_p) et (v_p) définies précédemment
- 1) Déterminer la limite de la suite (v_p)
 - 2) On a représenté dans la figure ci-après, les courbes $\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_6$ représentatives des fonctions f_3, f_4, f_5 et f_6 .



- a) Placer sur l'axe des abscisses les termes u_3, u_4, u_5 et u_6
 - b) Représenter sur $(0, j)$ les réels $f_3(u_4), f_4(u_5)$ et $f_5(u_6)$
- 3) a) Montrer que $\forall p \geq 3, f_p(u_{p+1}) < 0$
 - b) En déduire que la suite (u_p) est décroissante et qu'elle est convergente.
 - c) Montrer que $\frac{\ln(u_p)}{u_p} = \frac{1}{p}$. Déduire la limite de la suite (u_p) .

Exercice 24 Principal 2010 5 points

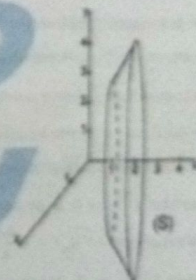
- 1) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln x - x \ln x + x$
 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
 - b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$
- 2) Dans la figure ci-après, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ sont les courbes dans un repère orthonormé (O, i, j) des fonctions g et h définies sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = \ln x$.
 - a) Par une lecture graphique, donner le signe de $f'(x)$
 - b) En déduire le sens de variation de la fonction f
 - c) Montrer que $f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$



- 3) On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans le repère (O, i, j)
 - a) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$
 - b) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 tels que $0.4 < x_1 < 0.5$ et $3.8 < x_2 < 3.9$
 - c) Placer dans le repère (O, i, j) les points $A(\beta, 0)$ et $B(0, \frac{1}{\beta})$ et en déduire une construction du point de coordonnées $(\beta, f(\beta))$. Tracer $\mathcal{C}_f$
- 4) $\forall t \in]0, +\infty[\setminus \{\beta\}$, Soit $\mathcal{A}(t)$ l'aire de la partie du plan $S(t)$ limitée par les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ et la droite $x = t$.
 - a) Montrer que $\forall t \in]0, +\infty[\setminus \{\beta\}, \mathcal{A}(t) = f(t) - f(\beta)$
 - b) Soit $t_0 > \beta$. Hachurer $S(t_0)$
 - c) Montrer qu'il existe un réel unique $t_1 \in]0, \beta[$ tel que $\mathcal{A}(t_1) = \mathcal{A}(t_0)$. Hachurer $S(t_1)$

Exercice 25 Principal 2010 4 points

Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $y = e^{\sqrt{x}}$ avec $x \in [1, 2]$ autour de l'axe (Ox) .



Le but de cet exercice est de calculer le volume V de ce solide.

- 1) Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{t}} dt$. Vérifier que $V = \pi F(2)$
- 2) Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^{2x} t \cdot e^{\sqrt{t}} dt$
 - a) Montrer que G dérivable sur $[1, +\infty[$ et que $G'(x) = 2 F'(x)$
 - b) En déduire que $\forall x \in [1, +\infty[, 2 F(x) = G(x) - G(1)$
- 3) a) Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$ par $G(x) = (\sqrt{4x} - 1)e^{\sqrt{4x}}$
- b) Calculer alors V

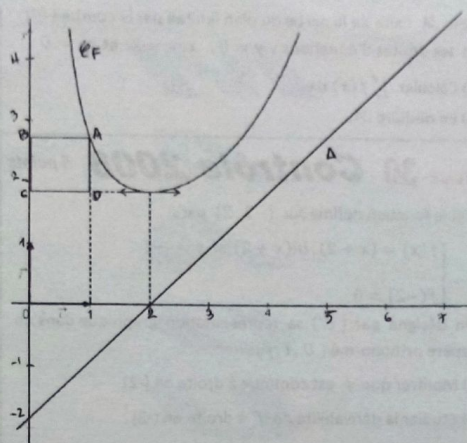
Exercice 26 Contrôle 2010 6 points

Soit la fonction définie $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Montrer que $f'(x) = \frac{e^x(x^2-4x+6)}{x^4}$
 - Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - Dresser le tableau de variation de f .
- Montrer que la tangente Δ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y = \frac{e^2}{8}(x-2)$
- On se propose d'étudier la position de $\mathcal{C}_f$ et de sa tangente. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x^3}$. On donne ci-dessous le tableau de variation de g :

x	0	2	3	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{e^2}{8}$	$\frac{e^3}{27}$	$+\infty$

- Montrer que l'équation $g(x) = \frac{e^2}{8}$ admet dans $]3, +\infty[$ une solution unique α telle que $4,2 < \alpha < 4,3$
- Déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ
- Justifier l'existence sur $]0, +\infty[$ d'une fonction F primitive de f telle que $F(1) = e$
- Ci-joint, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction F , la droite Δ et le rectangle $ABCD$ tel que : $A(1, e)$, $B(0, e)$, $C(0, F(2))$ et $D(1, F(2))$
- Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$
- Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ dans l'annexe ci-jointe.
- Soit $t \in [1, 2]$. On désigne par $S(t)$ la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites $x = t$ et $x = 2$. On désigne par $\mathcal{A}(t)$ l'aire de $S(t)$.



- Exprimer $\mathcal{A}(t)$ en fonction de $F(t)$
- Hachurer $S(1)$ et justifier qu'elle a la même aire que $ABCD$.
- Montrer qu'il existe un seul $t_0 \in [1, 2]$ tel que $\mathcal{A}(t_0) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(1)$
- Construire le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse t

Exercice 27 Principal 2009 5 points

Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par : $f(x) = \ln(1 - \sqrt{x})$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$
 - On donne ci-après le tableau de variation de la fonction f :

x	0	1
$f'(x)$		-
$f(x)$	0	$-\infty$

Tracer $\mathcal{C}$. (On précisera la demi-tangente à $\mathcal{C}$ en O).

- Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $]-\infty, 0]$ (On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et (Γ) sa courbe dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$)
 - Tracer (Γ) (on précisera la demi-tangente à (Γ) en O).
- Montrer que $\forall x \in]-\infty, 0]$, $f^{-1}(x) = (e^x - 1)^2$
 - Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations : $x = -\ln 2$, $x = 0$ et $y = 0$.
 - En déduire la valeur de $\int_0^1 \ln(1 - \sqrt{x}) dx$

Exercice 28 Contrôle 2009 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

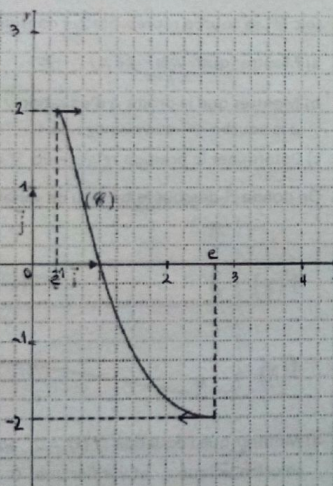
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 - Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.
 - Déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ .
- On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	3	+
$f(x)$	-1	$+\infty$

- Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}_+$, une solution unique α et vérifier que : $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
- Tracer la droite Δ et la courbe $\mathcal{C}$, on prendra $\alpha = 0,4$. (On précisera la demi-tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0)
- Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \int_0^1 [f(x)]^n dx$
 - Calculer u_1 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu
 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$
 - En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 29 Principal 2008 5 points

- Dans l'annexe ci-jointe, on a représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f définie sur $[\frac{1}{e}, e]$ par $f(x) = \ln^3(x) - 3 \ln x$ et les demi-tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ aux points d'abscisses respectives $\frac{1}{e}$ et e .
 - En utilisant le graphique, Montrer que f réalise une bijection de $[\frac{1}{e}, e]$ sur $[-2, 2]$. (On note f^{-1} la fonction réciproque de f et $(\mathcal{C}')$ la courbe de f^{-1} dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$).
 - Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ et les demi-tangentes à $(\mathcal{C}')$ aux points d'abscisses -2 et 2 .



- Soit la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ définie par $a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$
 - Calculer a_1
 - Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = e - (n+1) a_n$
 - En déduire que $a_3 = 6 - 2e$

- Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations : $y = 0$, $x = -2$ et $x = 0$
 - Calculer $\int_1^e f(x) dx$.
 - En déduire $\mathcal{A}$.

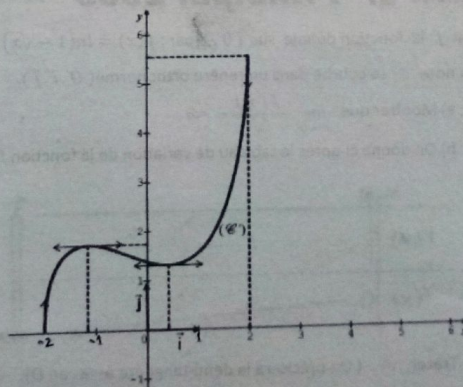
Exercice 30 Contrôle 2008 5 points

- Soit la fonction définie sur $[-2, 2]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+2) \cdot \ln(x+2) & \text{si } x \neq -2 \\ f(-2) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Montrer que f est continue à droite en (-2)
 - Etudier la dérivabilité de f à droite en (-2)
 - Donner le tableau de variation de la fonction f .
- Soit g la fonction définie sur $[-2, 2]$ par : $g(x) = f(x) - x\sqrt{4-x^2}$ et soit $(\mathcal{C}')$ sa courbe
 - Déterminer la position relative des courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$
 - Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe $(\mathcal{C})$ de g . Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ dans le même repère.



- 12 -

- Soit α un réel non nul appartenant à $[-2, 2]$. On désigne par $\mathcal{A}_\alpha$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.
 - Montrer que $\mathcal{A}_\alpha = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2} dx$. (On distinguera les deux cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$)
 - Calculer $\mathcal{A}_\alpha$
 - Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

Exercice 31 Contrôle 2008 4 points

$\forall n \in \mathbb{N}$, soit f_n définie sur $[0, 1]$ par : $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$

- Etudier les variations de la fonction f_n .
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution U_n et que $U_n \in]0, 1[$
- Comparer les réels $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.
 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(U_{n+1}) < 0$
 - Montrer que la suite (U_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(U_n) = -\frac{U_n}{2n+1}$
 - Calculer la limite de la suite U_n .

